

УДК 517.91

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І ПЕРІОДИЧНИМИ ВІЛЬНИМИ ЧЛЕНАМИ

В.А. Кушнір, Г.А. Кушнір, А.І. Петюренко

У статті досліджуються умови існування T -періодичних розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами і T -періодичними вільними членами у випадку простих коренів характеристичного рівняння системи.

Дослідженню умов існування T -періодичних розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами присвячено чимало робіт [1,2]. Як відомо [3,4], точний розв'язок серед названих систем мають системи зі сталими коефіцієнтами і T -періодичними змінними членами. Такими системами описуються коливання в різних механічних і фізичних системах. Отже, відшукування умов існування T -періодичних розв'язків цих систем є нагальною задачею, чому й присвячена дана стаття.

Система

$$\begin{cases} y_1' = P_{11}y_1 + P_{12}y_2 + \dots + P_{1n}y_n + f_1(x) \\ y_2' = P_{21}y_1 + P_{22}y_2 + \dots + P_{2n}y_n + f_2(x) \\ \dots \\ y_n' = P_{n1}y_1 + P_{n2}y_2 + \dots + P_{nn}y_n + f_n(x) \end{cases} \quad (1)$$

називається неоднорідною системою диференціальних рівнянь n -го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Будемо записувати систему (1) у матрично-векторній формі

$$\vec{y}' = P\vec{y} + \vec{f}(x) \quad (2)$$

де

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} \vec{y}_1' \\ \vec{y}_2' \\ \dots \\ \vec{y}_n' \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

n -вимірні вектори.

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

$(n \times n)$ числова матриця.

Якщо матриця P системи (2) має прості характеристичні числа, то таку систему, як відомо з теорії матриць [5], можна записати так

$$\vec{y}' = T\Lambda T^{-1}\vec{y} + \vec{f}(x) \quad (3)$$

де Λ -діагональна матриця

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Матриця T має своїми стовпцями власні вектори матриці P .

Помножимо зліва всі частини рівняння на T^{-1} , одержимо

$$(T^{-1}\vec{y})' = \Lambda(T^{-1}\vec{y}) + T^{-1}\vec{f}(x)$$

Або після заміни

$$\begin{aligned} \vec{z} &= T^{-1}\vec{y} \\ \vec{z}' &= \Lambda\vec{z} + T^{-1}\vec{f}(x) \end{aligned} \quad (4)$$

Нехай $\vec{f}(x)$ - T -періодична вектор-функція. Тобто

$$\vec{f}(x+T) = \vec{f}(x)$$

Система (4) у розгорнутому вигляді буде такою

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda_1 z_1 + \varphi_1(x) \\ z_2' &= \lambda_2 z_2 + \varphi_2(x) \\ &\dots\dots\dots \\ z_n' &= \lambda_n z_n + \varphi_n(x) \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\varphi_i(x) = \sum_{k=1}^n t_{ik}' f_k(x); \quad i = \overline{1, n} \quad (6)$$

а t_{ik} ; $(i = \overline{1, n}; k = \overline{1, n})$ елементи матриці T^{-1} . Оскільки функції $\vec{f}_i(x)$; $(i = \overline{1, n})$ T -періодичні, то згідно (6), будуть T -періодичні і функції $\varphi_i(x)$; $(i = \overline{1, n})$.

Проблема відшукування T -періодичних розв'язків неоднорідної системи (1) з T -періодичними вільними членами звелася до відшукування T -періодичних розв'язків окремих диференціальних рівнянь (5)

$$z_i' = \lambda_i z_i + \varphi_i(x), \quad i = \overline{1, n} \quad (7)$$

Спочатку розглянемо однорідні рівняння

$$z_i' = \lambda_i z_i, \quad i = \overline{1, n}$$

Їх розв'язками будуть функції

$$z_i' = C_i e^{\lambda_i x}, \quad i = \overline{1, n} \quad (8)$$

де C_i - const.

Методом варіації довільної сталої знаходимо загальний розв'язок неоднорідних рівнянь

$$z_i' = C_i'(x)e^{\lambda_i x} + C_i \lambda_i e^{\lambda_i x}; \quad i = \overline{1, n} \quad (9)$$

Підставимо (8), (9) в (7), маємо

$$C_i'(x)e^{\lambda_i x} + C_i(x)\lambda_i e^{\lambda_i x} = C_i(x)\lambda_i e^{\lambda_i x} + \varphi_i(x)$$

Звідки маємо

$$C_i'(x)e^{\lambda_i x} = \varphi_i(x)$$

$$C_i'(x) = e^{-\lambda_i x} \varphi_i(x)$$

$$C_i(x) = \int_0^x e^{-\lambda_i x} \varphi_i(x) dx + C_i; \quad C_i - const, i = \overline{1, n}$$

Тоді загальні розв'язки диференціальних рівнянь (7) матимуть вигляд

$$z_i = C_i e^{\lambda_i x} + e^{\lambda_i x} \int_0^x e^{-\lambda_i x} \varphi_i(x) dx \quad (10)$$

Розв'язок системи (1) матиме вигляд

$$\vec{y} = T\vec{z} = T\vec{z}_0 + T\vec{z}_H$$

де $\vec{y}_1 = T\vec{z}_0$ - загальний розв'язок однорідної системи, $\vec{y}_2 = T\vec{z}_H$ - частковий розв'язок неоднорідної системи, вектор-функція \vec{z} має своїми компонентами z_i , що виражаються формулою (10).

Умова існування T -періодичних розв'язків [2]

$$\vec{y}(0) = \vec{y}(T)$$

набуває вигляду

$$T\vec{z}_0(0) + T\vec{z}_H(0) = T\vec{z}_0(T) + T\vec{z}_H(T) \quad (11)$$

Згідно (11) $\vec{z}_H(0) = 0$. Тоді (11) набуває вигляду

$$T(\vec{z}_0(0) - \vec{z}_0(T)) = T\vec{z}_H(T)$$

Помноживши на T^{-1} зліва, маємо

$$\vec{z}_0(0) - \vec{z}_0(T) = \vec{z}_H(T)$$

Або в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} C_1(1 - e^{\lambda_1 T}) &= e^{\lambda_1 T} \int_0^T e^{-\lambda_1 x} \varphi_1(x) dx \\ C_2(1 - e^{\lambda_2 T}) &= e^{\lambda_2 T} \int_0^T e^{-\lambda_2 x} \varphi_2(x) dx \\ &\dots\dots\dots \\ C_n(1 - e^{\lambda_n T}) &= e^{\lambda_n T} \int_0^T e^{-\lambda_n x} \varphi_n(x) dx \end{aligned} \quad (12)$$

Кожне із лінійних алгебраїчних рівнянь (12) матиме єдиний розв'язок відносно C_i , якщо $1 - e^{\lambda_i T} \neq 0$. Отже, якщо серед λ_i ; ($i = \overline{1, n}$) немає нульових, то

система (1) із T -періодичними вільними членами буде мати єдиний T -періодичний розв'язок.

Приклад.

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 0,5y_2 + 0,5y_3 + 2\sin x \\ y_2' = y_1 + 2,5y_2 - 0,5y_3 + \cos x \\ y_3' = y_1 + 0,5y_2 + 1,5y_3 - \sin 2x \end{cases} \quad (13)$$

Вільні члени системи (13) є 2π -періодичними функціями.

Матриця системи (13)

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 2,5 & -0,5 \\ 1 & 0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$$

має ненульові характеристичні корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Отже система (13) матиме єдиний 2π -періодичний розв'язок. Знайдемо його.

Спочатку запишемо матрицю P у вигляді

$$P = T\Lambda T^{-1} \quad (14)$$

де

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

У векторно-матричній формі (13) матиме вигляд

$$\vec{y}' = P\vec{y} + \vec{f}(x) \quad (15)$$

де

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}; \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} 2\sin x \\ \cos x \\ -\sin 2x \end{pmatrix}$$

Враховуючи (14), (13) можна записати так

$$\vec{z}' = \Lambda\vec{z} + \varphi(x) \quad (16)$$

де

$$\vec{z}' = (T^{-1}\vec{y})'; \quad \vec{z} = (T^{-1}\vec{y}); \quad \varphi(x) = T^{-1}\vec{f}(x)$$

Запишемо (16) у скалярній формі

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1 + (-0,5 \cdot 2\sin x + 0 \cdot \cos x - 0,5\sin 2x) \\ z_2' &= 2z_2 + (0 \cdot 2\sin x - 0,5 \cdot \cos x + 0,5(-\sin 2x)) \\ z_3' &= 3z_3 + (0,5 \cdot 2\sin x + 0,5 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin 2x) \end{aligned}$$

Або після перетворень

$$\begin{aligned}
 z_1' &= z_1 + -\sin x - 0,5 \sin 2x \\
 z_2' &= 2z_2 - 0,5 \cdot \cos x - 0,5 \sin 2x \\
 z_3' &= 3z_3 + \sin x + 0,5 \cos x
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Розв'яжемо перше рівняння із (17)

$$z_1' - z_1 = -\sin x - 0,5 \sin 2x \tag{18}$$

Відповідне однорідне рівняння має загальний розв'язок

$$z_1 = C_1 e^x; C_1 - const$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння знаходимо методом невизначених коефіцієнтів

$$z = a_1 \sin x + b_1 \cos x + a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x \tag{19}$$

$$z' = a_1 \cos x - b_1 \sin x + 2a_2 \cos 2x - 2b_2 \sin 2x \tag{20}$$

Підставимо вирази для z, z' у (18), маємо

$$\begin{aligned}
 a_1 \cos x - b_1 \sin x + 2a_2 \cos 2x - 2b_2 \sin 2x - a_1 \sin x - \\
 - b_1 \cos x - a_2 \sin 2x - b_2 \cos 2x = -\sin x - 0,5 \sin 2x
 \end{aligned}$$

Звідки знаходимо

$$a_1 = \frac{1}{2}; b_1 = \frac{1}{2}; a_2 = 0,1; b_2 = 0,2$$

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (18) має вигляд

$$z_1 = C_1 e^x + 0,5 \sin x + 0,5 \cos x + 0,1 \sin 2x + 0,2 \cos 2x$$

Умова існування 2π -періодичного розв'язку $y(0) = y(2\pi)$ набуде вигляду

$$C_1 e^0 + 0,5 \sin 0 + 0,5 \cos 0 + 0,1 \sin 0 + 0,2 \cos 0 =$$

$$C_1 e^{2\pi} + 0,5 \sin 2\pi + 0,5 \cos 2\pi + 0,1 \sin 4\pi + 0,2 \cos 4\pi$$

$$C_1 - 0,5 + 0,2 = C_1 e^{2\pi} - 0,5 + 0,2$$

$$C_1 (1 - e^{2\pi}) = 0;$$

$$C_1 = 0$$

Отже

$$z_1 = 0,5 \sin x + 0,5 \cos x + 0,1 \sin 2x + 0,2 \cos 2x$$

2π -періодичний розв'язок і він єдиний.

Розв'яжемо друге рівняння із (17) аналогічно до попереднього

$$z_2' = 2z_2 - 0,5 \cos x - 0,5 \sin 2x \tag{21}$$

Відповідне однорідне рівняння

$$z_2' = 2z_2$$

має загальний розв'язок

$$z_2 = C_2 e^{2x}; C_2 - const$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння (21) шукаємо у вигляді (19).

Підставляючи (19) і (20) у (21) маємо

$$a_1 \cos x - b_1 \sin x + 2a_2 \cos 2x - b_2 \sin 2x - 2a_1 \sin x - \\ - 2b_1 \cos x - 2a_2 \sin 2x - 2b_2 \cos 2x = -0,5 \sin x - 0,5 \sin 2x$$

Звідки

$$\begin{cases} a_1 - 2b_1 = -0,5 \\ -2a_1 - b_1 = 0 \end{cases}$$

$$b_1 = -2a_1$$

$$a_1 - 4a_1 = -0,5$$

$$-3a_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{6}; b_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} a_2 - b_2 = 0 \\ 2a_2 + 2b_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a_2 = b_2$$

$$2a_2 + 2a_2 = \frac{1}{2}$$

$$4a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{8}; b_2 = \frac{1}{8}$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння (21) має вигляд

$$z_2 = C_2 e^{2x} + \frac{1}{6} \sin x - \frac{1}{3} \cos x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x \quad (22)$$

Умова періодичності

$$z_2(0) = z_2(2\pi);$$

Або із (22)

$$C_2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = C_2 e^{2\pi} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}$$

$$C_2(1 - e^{2\pi}) = 0$$

$$C_2 = 0$$

Тоді

$$z_2 = \frac{1}{6} \sin x - \frac{1}{3} \cos x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x$$

буде 2π -періодичним розв'язком другого рівняння із (17)

Третє рівняння із (17)

$$z_3' = 3z_3 + \sin x + 0,5 \cos x \quad (23)$$

Частковий розв'язок шукаємо у вигляді

$$z_{3H} = a \sin x + b \cos x$$

$$z_{3H}' = a \cos x - b \sin x$$

Підставимо ці значення в (23), маємо

$$a \cos x - b \sin x - 3a \sin x - 3b \cos x = \sin x + 0,5 \cos x$$

$$\begin{cases} a - 3b = 0,5 \\ -3a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,5 + 3b \\ -1,5 - 9b - b = 1 \end{cases}$$

$$-10b = 2,5 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}; a = -\frac{1}{4}$$

Отже,

$$z_3 = C_3 e^{3x} - \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{4} \cos x \quad (24)$$

$$z_3(0) = z_3(2\pi)$$

$$C_3 - \frac{1}{4} = C_3 e^{6\pi} - \frac{1}{4}$$

$$C_3 = 0$$

Тоді 2π -періодичним розв'язком третього рівняння із (17) буде

$$z_3 = -\frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{4} \cos x$$

Зауваження. Із вигляду загальних розв'язків рівнянь (17) (наприклад із (24)), очевидно, що при $C_3 = 0$ матимемо частковий 2π -періодичний розв'язок. Однак, далеко не завжди можна скористатися методом невизначених коефіцієнтів, який допомагає уникнути відшукування інтегралів, які в скінченному вигляді взагалі можуть не братися. Тоді розв'язок буде доведено тільки до квадратур. Якщо при цьому виконується умова існування T -періодичного розв'язку, то ми його зможемо знайти в квадратурах, а потім наближеними методами, чисельними чи за допомогою рядів, знайти відповідні інтеграли.

Таким чином, вектор \vec{z} знайдено

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{10} \sin 2x + \frac{1}{5} \cos 2x \\ \frac{1}{6} \sin x - \frac{1}{3} \cos x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x \\ -\frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{4} \cos x \end{pmatrix}$$

Вектор $\vec{y} = T\vec{z}$. Або

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{10} \sin 2x + \frac{1}{5} \cos 2x \\ \frac{1}{6} \sin x - \frac{1}{3} \cos x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x \\ -\frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{4} \cos x \end{pmatrix}$$

Звідки

$$\begin{aligned}
y_1 &= -\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x - \\
&\quad - \frac{1}{6}\sin x - \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\cos x = \\
&= -\frac{11}{12}\sin x - \frac{13}{12}\cos x + \frac{1}{40}\sin 2x - \frac{3}{40}\cos 2x \\
y_2 &= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{10}\sin 2x + \frac{1}{5}\cos 2x + \\
&\quad + \frac{1}{6}\sin x + \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x = \\
&= \frac{2}{3}\sin x + \frac{5}{6}\cos x - \frac{1}{40}\sin 2x + \frac{3}{40}\cos 2x \\
y_3 &= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{10}\sin 2x + \frac{1}{5}\cos 2x - \\
&\quad - \frac{1}{6}\sin x - \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\cos x = \\
&= \frac{1}{12}\sin x - \frac{1}{12}\cos x + \frac{9}{40}\sin 2x + \frac{13}{40}\cos 2x
\end{aligned}$$

Функції y_1, y_2, y_3 , є єдиним 2π -періодичним розв'язком системи (13).

Розглянемо випадок, коли відповідна системі (1) однорідна система має T -періодичний розв'язок. Це можливо, коли одне з характеристичних чисел рівне нулю. Нехай $\lambda_1 = 0$. Тоді перше рівняння із (12) набуде вигляду

$$C_1 \cdot 0 = \int_0^T \varphi_1(x) dx$$

Зрозуміло, що це рівняння відносно C_1 буде мати ненульовий розв'язок тільки при умові

$$\int_0^T \varphi_1(x) dx = 0$$

У протилежному разі T -періодичних розв'язків не існує.

Приклад.

$$\begin{cases} y_1' = y_3 + 1 \\ y_2' = -1,5y_1 + 1,5y_2 + 1,25y_3 - \cos x \\ y_3' = -y_1 + y_2 + 1,5y_3 + 2\sin x \end{cases} \quad (25)$$

Відповідна однорідна система буде мати вигляд

$$\begin{cases} y_1' = y_3 + 1 \\ y_2' = -1,5y_1 + 1,5y_2 + 1,25y_3 \\ y_3' = -y_1 + y_2 + 1,5y_3 \end{cases}$$

Матриця перетворення має вигляд

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,75 \\ 0,5 & -0,5 & 0,25 \\ -0,5 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Систему (25) у матрично-векторній формі можна записати так

$$\vec{y}' = P\vec{y} + \vec{f}$$

де

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}; \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos x \\ 2\sin x \end{pmatrix}$$

Або враховуючи (26)

$$\vec{y}' = T\Lambda T^{-1}\vec{y} + \vec{f}(x)$$

Звідки

$$\vec{z}' = \Lambda\vec{z} + \vec{\varphi}(x), \quad \vec{\varphi}(x) = T^{-1}\vec{f}(x)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,75 \\ 0,5 & -0,5 & 0,25 \\ -0,5 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos x \\ 2\sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 - 0,5\cos x - 1,5\sin x \\ 0,5 + 0,5\cos x + 0,5\sin x \\ -0,5 - 0,5\cos x + 0,5\sin x \end{pmatrix}$$

У розгорнутому вигляді система запишеться так

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 - 0,5\cos x - 1,5\sin x \\ 0,5 + 0,5\cos x + 0,5\sin x \\ -0,5 - 0,5\cos x + 0,5\sin x \end{pmatrix} \quad (27)$$

Із (27) маємо скалярні рівняння

$$\begin{cases} z_1' = 0,5x - 0,5\cos x - 1,5\sin x \\ z_2' = z_2 + 0,5 + 0,5\cos x + 0,5\sin x \\ z_3' = 2z_3 - 0,5 - 0,5\cos x + 0,5\sin x \end{cases} \quad (28)$$

Із першого рівняння маємо

$$z_1 = 0,5x + 1,5\cos x - 0,5\sin x + C_1$$

Умова $z_1(0) = z_1(2\pi)$ не виконується ні при якому значенні C_1 . Отже, перше рівняння із (28) не має 2π -періодичних розв'язків. Значить не має 2π -періодичних розв'язків і система (25).

Приклад.

$$\begin{cases} y_1' = y_3 - \sin x \\ y_2' = -1,5y_1 + 1,5y_2 + 1,25y_3 - \cos x \\ y_3' = -y_1 + y_2 + 1,5y_3 + 2\sin x \end{cases} \quad (29)$$

Після перетворень будемо мати систему

$$\begin{cases} z_1' = -0,5 \cos x - 2 \sin x \\ z_2' = z_2 0,5 \cos x \\ z_3' = z_3 - 0,5 \cos x + \sin x \end{cases} \quad (30)$$

Із першого рівняння системи (30) маємо

$$z_1 = 2 \cos x - 0,5 \sin x + C_1$$

Умова $z_1(0) = z_1(2\pi)$ виконується при будь-якому значенні C_1 . Тобто, всі часткові розв'язки першого рівняння є 2π -періодичними.

Загальний розв'язок другого однорідного рівняння

$$z_2 = C_2 e^x; \quad C_2 - \text{const}$$

Частковий розв'язок другого рівняння шукаємо у вигляді

$$z_{2H} = a \sin x + b \cos x$$

$$z_{2H}' = a \cos x - b \sin x$$

Підставляємо значення z_{2H}, z_{2H}' у друге рівняння системи (30)

$$a \sin x + b \cos x - a \cos x + b \sin x = 0,5 \cos x$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 0,5 \end{cases}$$

$$2b = 0,5 \Rightarrow b = \frac{1}{4}; a = -\frac{1}{4}$$

Загальний розв'язок другого рівняння системи (30) буде

$$z_2 = C_2 e^x - \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cos x$$

Умова $z_2(0) = z_2(2\pi)$ перетворюється у рівність

$$C_2 + \frac{1}{4} = C_2 e^{2\pi} + \frac{1}{4}$$

$$C_2 = 0$$

Отже,

$$z_2 = -\frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cos x$$

2π -періодичний розв'язок другого рівняння системи (30).

Частковий розв'язок третього неоднорідного рівняння також будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів

$$z_{3H} = a \sin x + b \cos x$$

$$z_{3H}' = a \cos x - b \sin x$$

$$a \sin x + b \cos x - a \cos x + b \sin x = \sin x - 0,5$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = -0,5 \end{cases}$$

$$2b = -0,5 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}; a = \frac{1}{4}$$

$$z_3 = C_3 e^{2x} + \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cos x$$

Умова періодичності $z_3(0) = z_3(2\pi)$ приводить до того, що $C_3 = 0$.

$$z_3 = \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cos x$$

буде 2π -періодичним розв'язком третього рівняння системи (30).

Знайдемо 2π -періодичний розв'язок системи (29)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,75 \\ 0,5 & -0,5 & 0,25 \\ -0,5 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,5 \sin x + 2 \cos x + C_1 \\ -\frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cos x \\ \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cos x \end{pmatrix}$$

Звідки

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{15}{16} \sin x + \frac{15}{16} \cos x + 0,5C_1 \\ y_2 = -\frac{1}{16} \sin x + \frac{15}{16} \cos x + 0,5C_1 \\ y_3 = -\frac{5}{16} \sin x - \frac{13}{16} \cos x - 0,5C_1 \end{cases}$$

Це і будуть 2π -періодичні розв'язки системи (29).

Отже, якщо серед коренів характеристичного рівняння системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і періодичними вільними членами немає нульових, то неоднорідна система буде мати єдиний T -періодичний розв'язок. Якщо одне з характеристичних чисел рівне нулю ($\lambda_i = 0$), то неоднорідна система диференціальних рівнянь матиме T -періодичний розв'язок лише при умові $\int_0^T \varphi_i(x) dx = 0$.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Шкиль Н.И., Вороной А.Н., Лейфура В.Н. Асимптотические методы в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. – К.: Вища школа, 1986. – 248 с.
2. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967. – 564 с.
4. Шкіль М.І., Сотніченко М.А. Звичайні диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1992. – 303 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

Кіровоградський державний педагогічний
університет ім. В.Винниченка,
Кіровоградський національний технічний
університет

Надійшло 14 вересня 2004р.